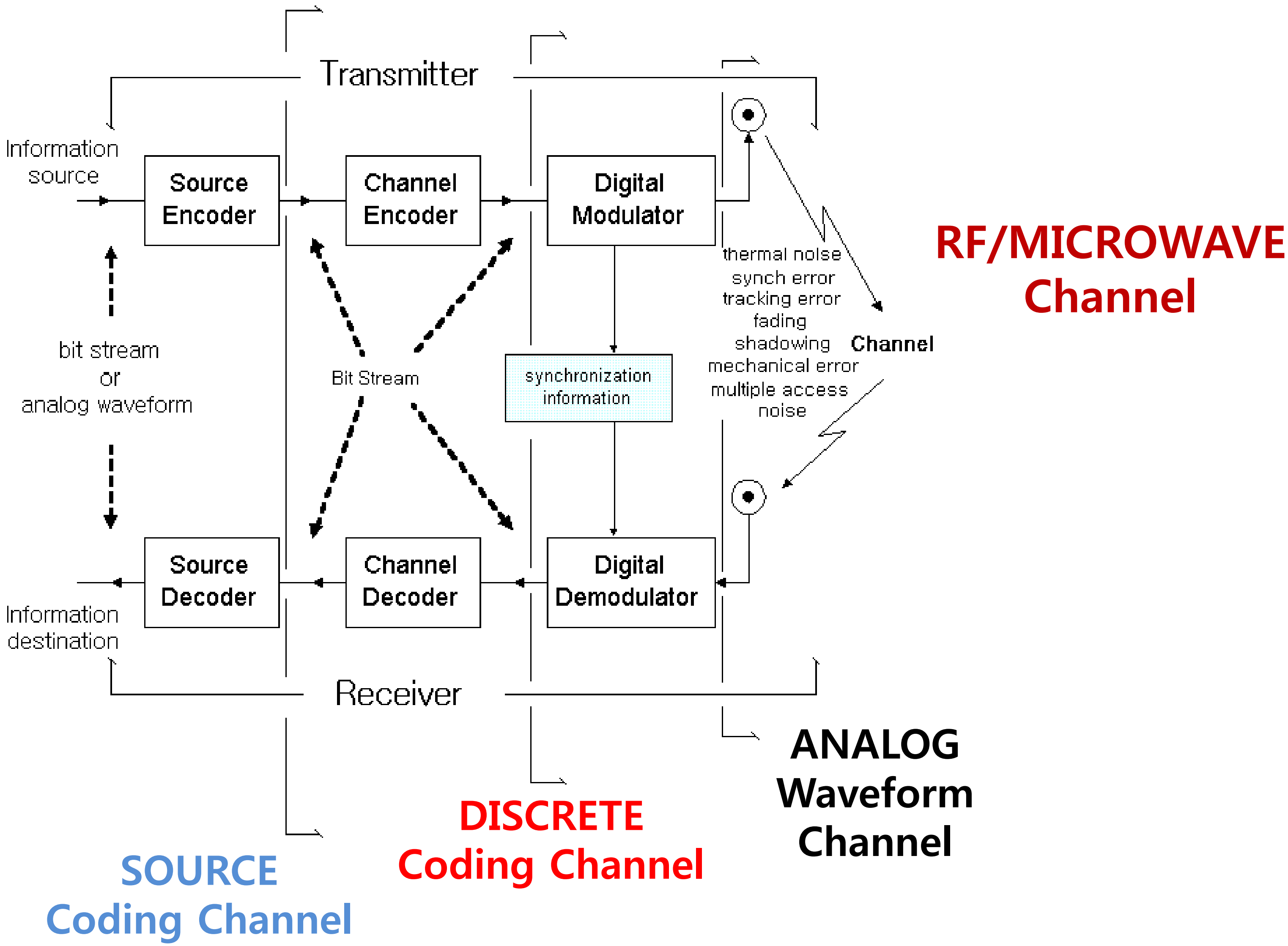
오류정정부호 기본 개념 2

How to evaluate the performance of a code ?

송홍엽교수

전기전자공학부 주니어세미나 수업자료

Digital Communication Modem

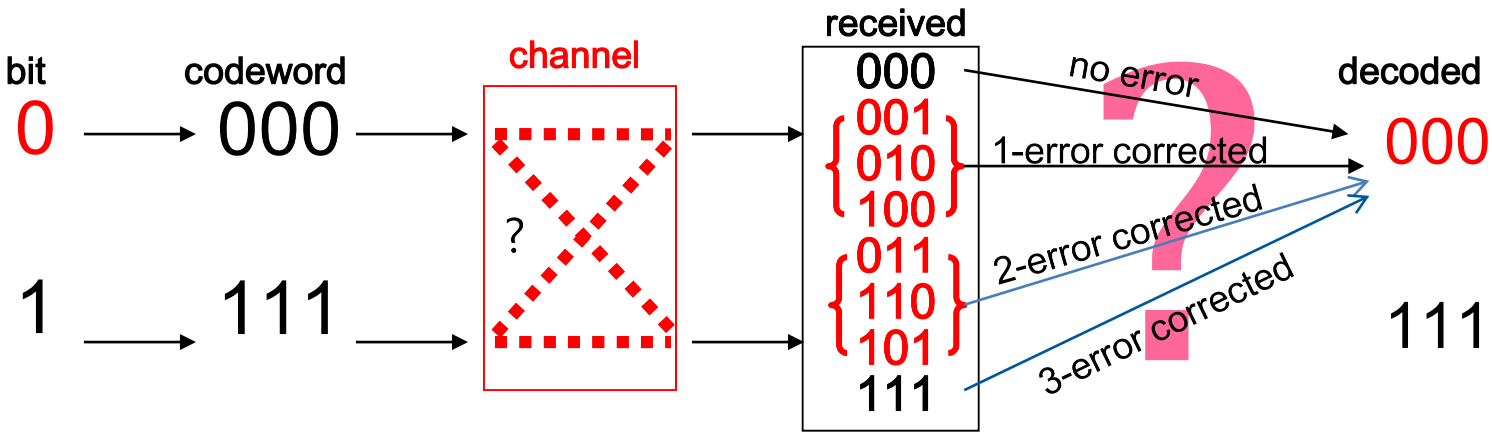


How to evaluate the performance of a code ?

CODING GAIN

Three-time-repeat code over BSC

Three-time repetition encoding and **majority vote decoding**:



Suppose we receive 100.

Is it tx=000 with error=100

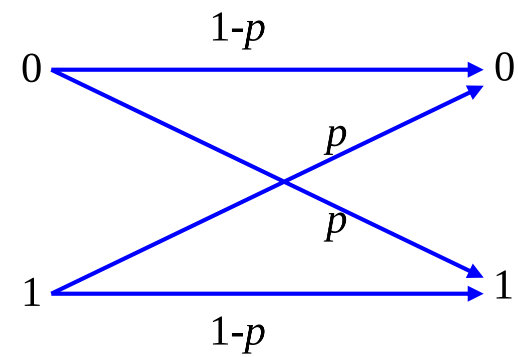
or tx=111 with error=011 ?

Which error was **more likely to happen** in the channel ?

000	no error with tx=000 three errors with tx=111
001 010 100	one error with tx=000 two errors with tx=111
011 110 101	two errors with tx=000 one error with tx=111
111	three errors with tx=000 no error with tx=111

Error probability of BSC and ML decoding rule

- We may assume that $0<p<1/2$.
- Typically, p is very small, say, 1/10 or smaller.
- Assume p=1/10. Then
  - **P(no error)=$(1-p)^3$ =$9^3/10^3$=0.729**
  - **P(1 error)=$(1-p)^2p$ =$9^2/10^3$=0.081**
  - **P(2 error)=$(1-p)p^2$ =$9/10^3$ =0.009**
  - **P(3 error)=p^3 =$1/10^3$ =0.001**



Binary Symmetric Channel

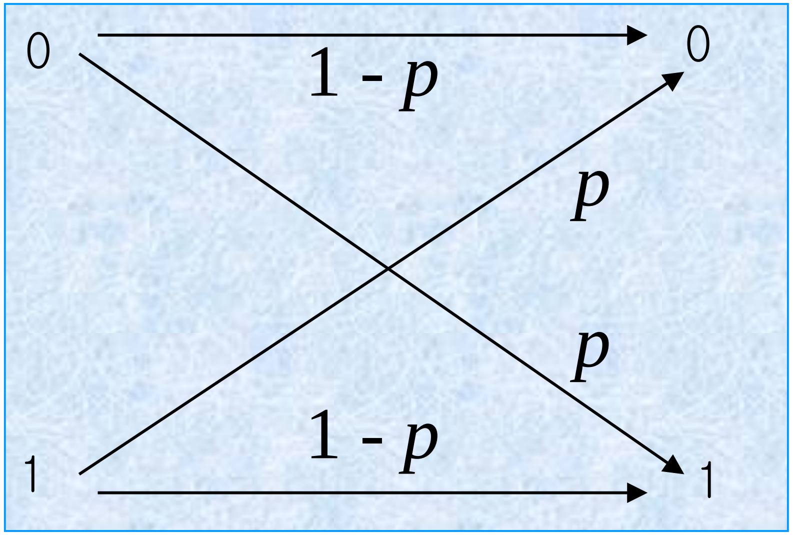
- This gives:

rx	ML decoding rule ??
000	no error with tx=000 three errors with tx=111
001 010 100	one error with tx=000 two errors with tx=111
011 110 101	two errors with tx=000 one error with tx=111
111	three errors with tx=000 no error with tx=111

rx	ML decoding rule
000	no error with tx=000
001 010 100	one error with tx=000
011 110 101	one error with tx=111
111	no error with tx=111

Majority vote decoding

Binary Symmetric Channel



Most famous and widely used model of discrete coding channel

Models "AWGN + Equally likely Inputs"

Usually $0<p<<1/2$ and **it represents the performance of MODEM**

Here, p is regarded as a part of channel characteristics.

We assume that Message = any three bits

Message Error Probability Without Coding :

$$P_{uncoded}(E) = 1-(1-p)^3$$

Message Error Probabilities

Consider any 3-bit message.

Message error probability without coding : $P_{uncoded}(E) = 1-(1-p)^3$

Message error probability with coding : $P_{coded}(E) = 1-(1-q)^3$

where q is the probability of incorrect reception of one bit of message, which is the probability of incorrect decoding of a received codeword (which is in fact one bit of a message).

Incorrect decoding happens if the channel puts more than 1 error.

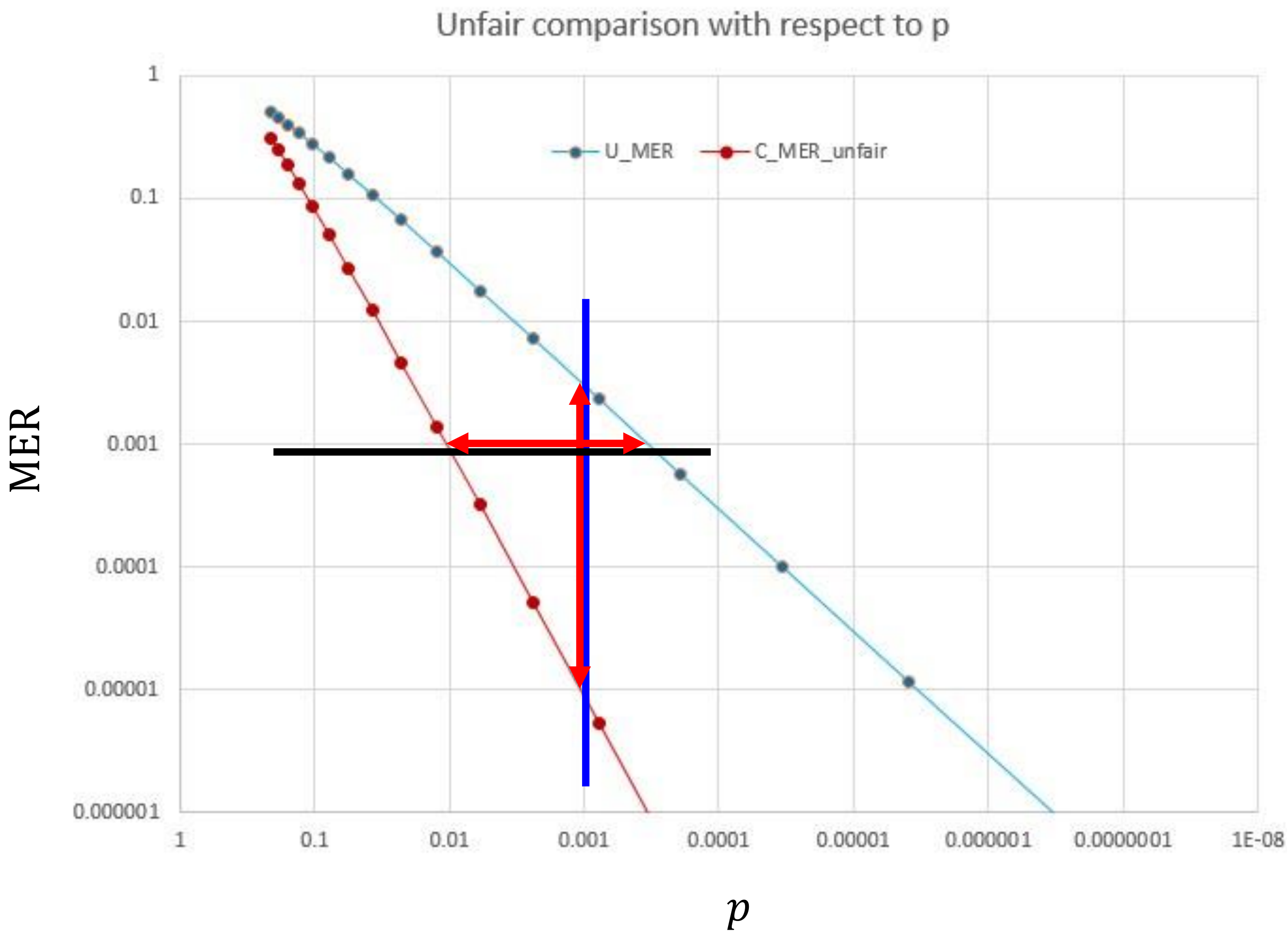
There are 1 three-error pattern, and 3 two-error patterns.

Therefore, we have

$$q = p^3 + 3p^2(1-p)$$

$$\begin{aligned} p &= 0.1 && \rightarrow q = 0.028 \\ p &= 0.01 && \rightarrow q = 0.000298 \\ p &= 0.001 && \rightarrow q = 0.000002998 \end{aligned}$$

UNFAIR
Comparison of Performance



연습문제

C_5 = {00000, 11111}을 생각하자.

위의 코드 C_5 를 BSC로 모델링 되는 통신채널에 사용하자.
여기서 BSC의 crossover 오류확률은 p=0.2라고 하자.
5-bit message를 전송한다고 가정하자.

(1) 임의의 메시지의 uncoded 오류확률은 얼마인가?
p의 함수로 표시하고, 값을 구하시오.

(2) 임의의 메시지의 coded 오류확률은 얼마인가?
p의 함수로 표시하고, 값을 구하시오.

(3) p=0.05 일 때 위 계산을 반복하시오.

Why unfair?

- "Bit Energy"로 normalize 하지 않았기 때문.
- 이전 페이지의 확률은 coded bit energy가 uncoded bit energy에 비하여 3배로 크다고 가정한 결과이므로 unfair함.

- **1 bit의 정보**를 전달하기 위해서 사용하는 **전송에너지**를 비교하자
  - **uncoded systems: 1 (uncoded) bit**
  - **coded system: 3 coded bits**
- 공정한 비교를 위해서는 위의 과정에 동일한 에너지를 사용해야 함.
- 즉, 3 coded bits와 1 uncoded bit의 에너지가 동일해야 함.
- 즉, 1 coded bit는 1 uncoded bit의 1/3의 에너지만 사용해야 함.
  - Code rate = 1/3
  - **BER=10^{-3}에서 약 1.4 dB loss**

- 우리는 이 과목에서 **loss가 아닌 gain을 얻는** 다양한 coding방법을 공부할 예정임.

1 bit energy 표시 단위

- $\frac{E_b}{N_0}$ = bit energy/noise PSD (수신단에서)

- $\frac{E_b}{N_0}$ 는 단위가 없으며, 상대적인 값이므로, 주로 dB로 변환하여 사용한다.

dB ??

$0\ \mathrm{dB} = 1 = \text{the same ratio}$
$3\ \mathrm{dB} = 2 = \text{twice much}$

- $\frac{E_b}{N_0}$ = bit energy/noise PSD = 9 dB
  ⇔ bit energy가 noise energy에 비하여 2^3=8 배 크다

- if $\frac{E_b}{N_0} = \gamma$ (**dB**), then its non-dB value is given by $10^{\gamma/10}$
- if $\frac{E_b}{N_0} = \delta$ (non-dB), then its dB value is $10 \log_{10} \delta$

$\boldsymbol{\gamma = 10\, log_{10}\, \delta}$ or $\boldsymbol{\delta = 10^{\gamma/10}}$

dB	non-dB (~배)
1	1.3
2	1.6
3	**2.0**
4	2.5
5	3.2
6	**4.0**
7	5.0
8	6.3
9	**8.0**
10	10.0

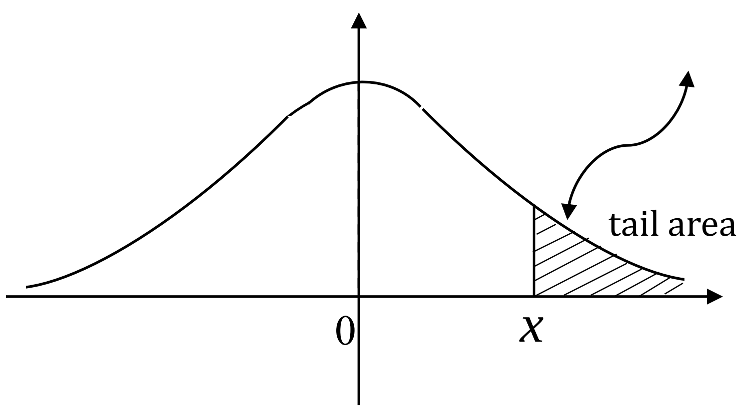
BSC의 p와 $\frac{E_b}{N_0}$의 관계?

- 디지털 변복조 방식에 따라 다르다.
- **BPSK변조와 이상적인 ML복조**를 한다면, 다음의 관계가 있다.

$$p = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$ = crossover probability of BSC

여기서 $Q(x)$는 Gaussian tail probability 함수로 Q-function이라 부르며, 다음과 같이 주어진다.

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$



x	$Q(x)$	x	$Q(x)$
0	5.00E-01	2.7	3.47E-03
0.1	4.60E-01	2.8	2.56E-03
0.2	4.21E-01	2.9	1.87E-03
0.3	3.82E-01	3.0	1.35E-03
0.4	3.45E-01	3.1	9.68E-04
0.5	3.09E-01	3.2	6.87E-04
0.6	2.74E-01	3.3	4.83E-04
0.7	2.42E-01	3.4	3.37E-04
0.8	2.12E-01	3.5	2.33E-04
0.9	1.84E-01	3.6	1.59E-04
1.0	1.59E-01	3.7	1.08E-04
1.1	1.36E-01	3.8	7.24E-05
1.2	1.15E-01	3.9	4.81E-05
1.3	9.68E-02	4.0	3.17E-05
1.4	8.08E-02	4.5	3.40E-06
1.5	6.68E-02	5.0	2.87E-07
1.6	5.48E-02	5.5	1.90E-08
1.7	4.46E-02	6.0	9.87E-10
1.8	3.59E-02	6.5	4.02E-11
1.9	2.87E-02	7.0	1.28E-12
2.0	2.28E-02	7.5	3.19E-14
2.1	1.79E-02	8.0	6.22E-16
2.2	1.39E-02	8.5	9.48E-18
2.3	1.07E-02	9.0	1.13E-19
2.4	8.20E-03	9.5	1.05E-21
2.5	6.21E-03	10.0	7.62E-24
2.6	4.66E-03		

Q-function table을 가지고 다음 순서로 계산한다.

$\frac{E_b}{N_0}$ (dB) $= \gamma =$ 0, 1, 2, 3,.... 에 대해서

(1) $\frac{E_b}{N_0}$ (non-dB) $= \delta = 10^{\gamma/10}$

(2) $p = Q\left(\sqrt{2\delta}\right)$ this is uncoded BER

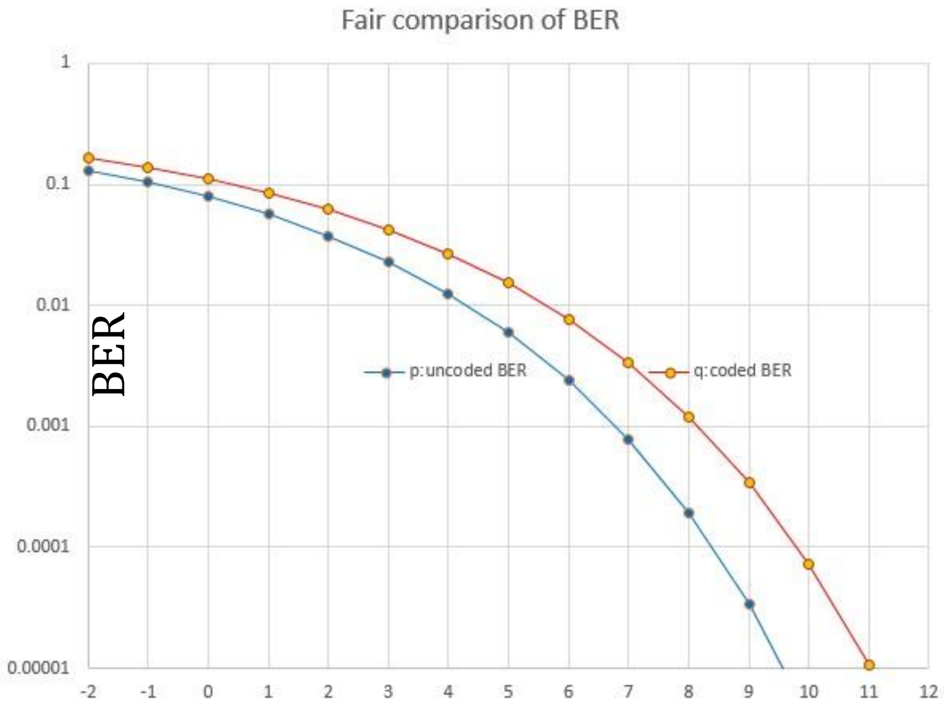
(3) uncoded MER $= 1 - (1-p)^3$

(4) $r = p' = Q\left(\sqrt{2\delta/3}\right)$ **: code rate 1/3 반영**

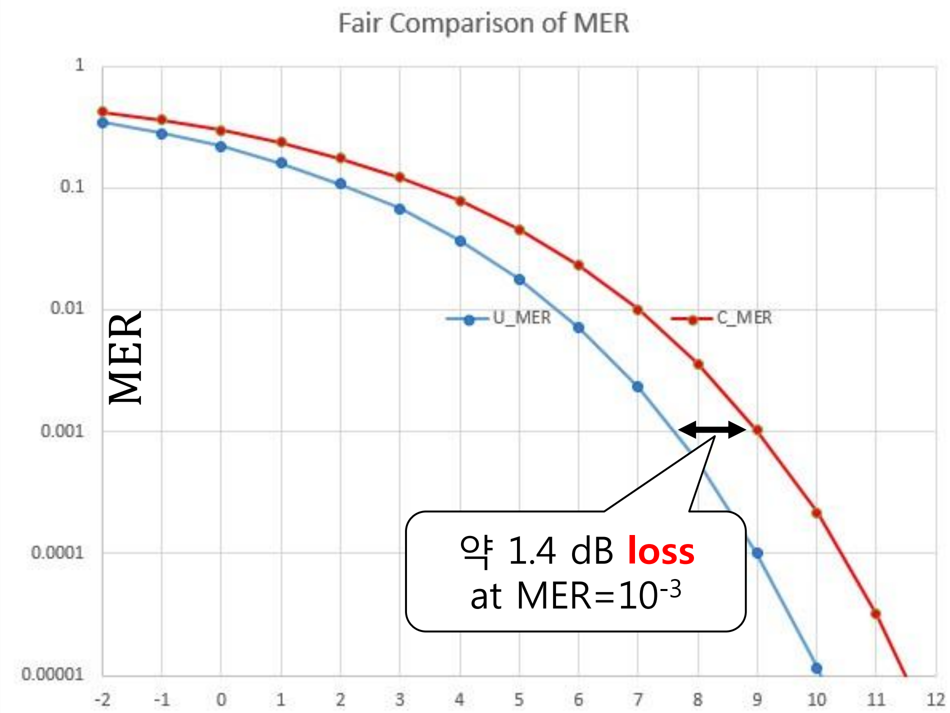
(5) $q = r^3 + 3r^2(1-r)$ this is coded BER

(6) coded MER $= 1 - (1-q)^3$

Fair Comparison with BPSK and ideal ML receiver



$\frac{E_b}{N_0}$ (dB)



$\frac{E_b}{N_0}$ (dB)

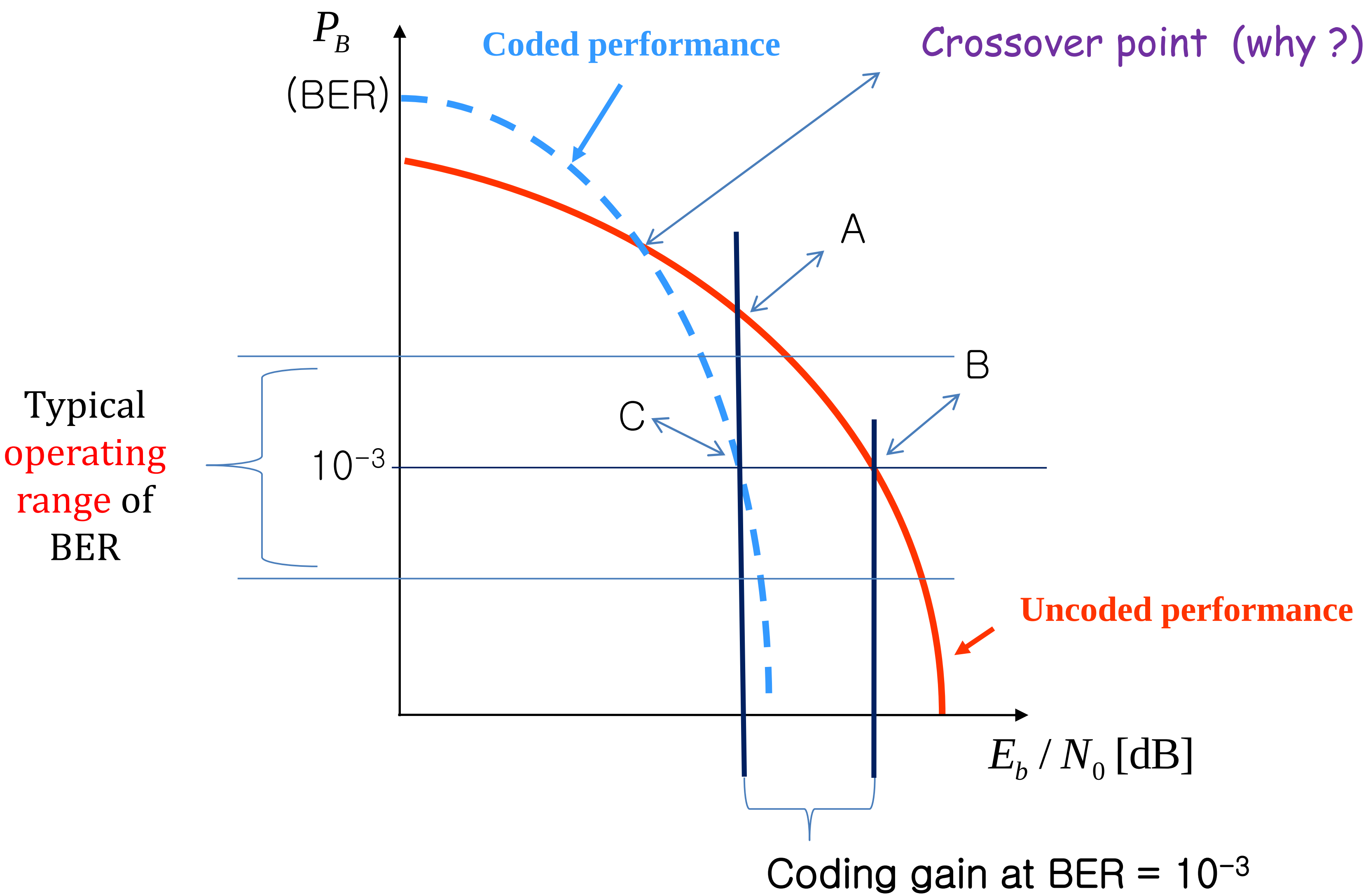
Coding Gain

Coding gain G is defined as the **reduction** in the required $\mathbf{E_b/N_o}$ **(dB)** that is needed due to the error performance property of channel coding at a given P_B. That is,

$$G(C, P_B) = \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\substack{\text{uncoded system} \\ \text{(required for } P_B\text{)}}} - \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\substack{\text{coded system} \\ \text{(required for } P_B\text{)}}} \quad \text{(dB)}$$

It depends on the specific code and specific level of BER.

Typical Performance



연습문제

C_5 = {00000, 11111}을 생각하자. 코드 C_2 를 BPSK와 이상적인 coherent ML 수신기를 사용하는 모뎀에 사용하자. 이때, 통신채널은 주어진 $\frac{E_b}{N_0}$에 대해서 BSC로 모델링 되며, crossover 오류확률은 다음과 같이 결정된다고 하자.

$$p = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

5-bit message를 전송한다고 가정하자. $\frac{E_b}{N_0}$ = 0, 1,…, 10 (dB) 각각에 대한 uncoded MER과 coded MER을 구하고 이를 스케치하라.

연습문제

C_5 = {00000, 11111}을 생각하자. 코드 C_2 를 BFSK와 이상적인 non-coherent ML 수신기를 사용하는 모뎀에 사용하자. 이때, 통신채널은 주어진 $\frac{E_b}{N_0}$에 대해서 BSC로 모델링 되며, crossover 오류확률은 다음과 같이 결정된다고 하자.

$$p = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{2N_0}}$$

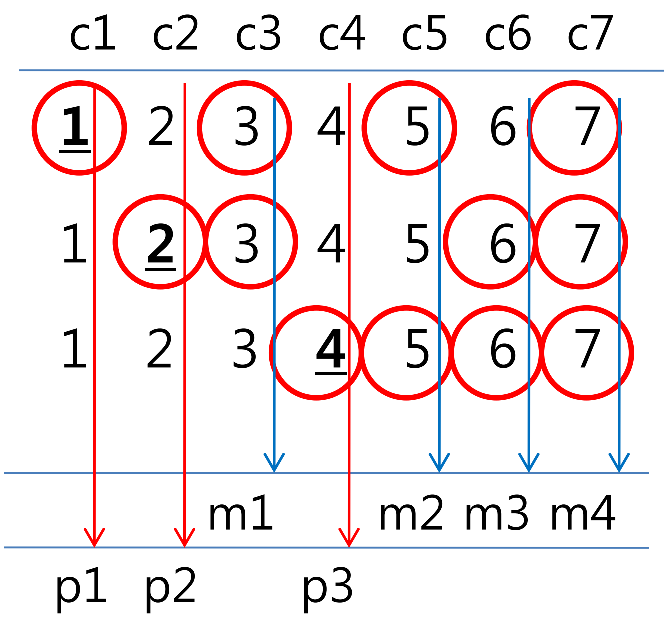
5-bit message를 전송한다고 가정하자. $\frac{E_b}{N_0}$ = 0, 1,..., 10 (dB) 각각에 대한 uncoded MER과 coded MER을 구하고 이를 스케치하라.

Hamming codes

FIRST VIEW: HIGH-SCHOOL-ALGEBRA APPROACH

Binary Hamming code of length 7 = 2^3-1 (has 3 parity bits)

Encoding rule:



$$c1+c3+c5+c7=0 \Leftrightarrow \boxed{p1=m1+m2+m4}$$

$$c2+c3+c6+c7=0 \Leftrightarrow \boxed{p2=m1+m3+m4}$$

$$c4+c5+c6+c7=0 \Leftrightarrow \boxed{p3=m2+m3+m4}$$

Decoding rule:

Given a received vector (r1 r2 r3 r4 r5 r6 r7),
Calculate check sums as follows:

s0=r1+r3+r5+r7
s1=r2+r3+r6+r7
s2=r4+r5+r6+r7

If (s2,s1,s0)=(0,0,0) then NO ERROR.
Otherwise, change the bit at 4*s2+2*s1+s0.

Two examples:

Assume **one bit error** during transmission, and received as

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7		rx
tx	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	→	0 1 1 0 0 <u>0</u> 1
tx	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	→	0 <u>1</u> 1 1 0 0 1

CASE 1: 0 1 1 0 0 <u>0</u> 1

s0=r1+r3+r5+r7=0
s1=r2+r3+r6+r7=1
s2=r4+r5+r6+r7=1

Change the bit at (110) = 4*s2+2*s1+s0 = 6.

CASE 1: 0 <u>1</u> 1 1 0 0 1

s1=r1+r3+r5+r7=0
s2=r2+r3+r6+r7=1
s3=r4+r5+r6+r7=0

Change the bit at (010) = 4*s2+2*s1+s0 = 2.

Encoding Patterns for any $r \geq 2$

Case $r = 2$

Case $r = 3$

Case $r = 4$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

r-bit party Hamming code
(HSA-view summary)

- code length = n = 2^r -1, and Message length = k = n-r = 2^r -1-r
- **encoding**
  1. position index = 1,2,…,n
  2. parity position = position index which is a power of two = 1,2,4,8,…
  3. message position = position index which is not a power of two
  4. parity computation:

     $c_1 + c_3 + c_5 + c_7 + \cdots \;= 0$ (position 1 부터 1 개씩 더하면서 1 자리씩 건너뛴 합이 0)

     $c_2 + c_3 + c_6 + c_7 + \cdots \;= 0$ (position 2 부터 2 개씩 더하면서 2 자리씩 건너뛴 합이 0)

     $c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + \cdots \;= 0$ (position 4 부터 4 개씩 더하면서 4 자리씩 건너뛴 합이 0)

     ………………

- **decoding**
  1. compute the party check for all the parity groups as

     $s_0 = c_1 + c_3 + c_5 + c_7 + \cdots$

     $s_1 = c_2 + c_3 + c_6 + c_7 + \cdots$

     $s_2 = c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + \cdots$

     ……………………

     $s_{r-1} = c_{2^{r-1}} + c_{2^{r-1}+1} + \cdots$

  2. decision: change (correct) the bit at position $(s_{r-1},\ s_{r-2}, \ldots,\ s_1,\ s_0) = \sum_{i=0}^{r-1} 2^i\, s_i$ if this is not 0.

연습문제

앞에서 공부한 길이 7의 binary Hamming code를 생각하자. 다음 각각을 수신했을 때 이를 decoding 하시오.

(1) 0000000
(2) 0000001
(3) 0000011
(4) 0000111
(5) 0001111
(6) 0011111
(7) 0111111
(8) 1111111

연습문제

앞에서 공부한 길이 7의 binary Hamming code를 생각하자. 이 코드를 **optimum BPSK와 이상적인 coherent ML 수신기**를 사용하는 모뎀에 사용하자. 이때, 통신채널은 주어진 $\frac{E_b}{N_0}$에 대해서 BSC로 모델링 되며, crossover 오류확률은 다음과 같이 결정된다.

$$p = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

4-bit message를 전송한다고 가정하자. $\frac{E_b}{N_0}$ = 0, 1,..., 10 (dB) 각각에 대한 uncoded MER과 coded MER을 구하고 이를 스케치하라.

연습문제

앞에서 공부한 길이 7의 binary Hamming code를 생각하자. 이 코드를 **optimum BFSK와 이상적인 non-coherent ML 수신기**를 사용하는 모뎀에 사용하자. 이때, 통신채널은 주어진 $\frac{E_b}{N_0}$에 대해서 BSC로 모델링 되며, crossover 오류확률은 다음과 같이 결정된다고 하자.

$$p = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{2N_0}}$$

4-bit message를 전송한다고 가정하자. $\frac{E_b}{N_0}$ = 0, 1,..., 10 (dB) 각각에 대한 uncoded MER과 coded MER을 구하고 이를 스케치하라.