프로토그래프를 이용하는 Reed-Solomon 기반 Quasi-Cyclic LDPC Codes 설계

김인선, 송홍엽
연세대학교
2018년도 한국통신학회 하계종합학술발표회

1. 프로토그래프를 이용한 RS 기반 Quasi-Cyclic LDPC Codes 설계

- **RS 기반 QC-LDPC Codes**
  - Reed-Solomon 코드의 패리티 검사 행렬을 이용하여 girth가 8이 되는 QC-LDPC 설계 방법이 소개됨[1]
  - $GF(2^s)$에서의 RS 코드의 패리티 검사 행렬

$$B_{RS}(d,n)=\begin{bmatrix}1 & \beta & \cdots & \beta^{n-1}\\ 1 & \beta^2 & \cdots & (\beta^2)^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots\\ 1 & \beta^d & \cdots & (\beta^d)^{n-1}\end{bmatrix}$$

- RS기반 QC-LDPC의 패리티 검사 행렬

$$H_{RS}(d,n)=\begin{bmatrix}H_{0,0} & H_{0,1} & \cdots & H_{0,n-1}\\ H_{1,0} & H_{1,1} & \cdots & H_{1,n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ H_{d-1,0} & H_{d-1,1} & \cdots & H_{d-1,n-1}\end{bmatrix}$$

  - $H_{i,j}$는 크기가 $r\times r$인 단위 행렬을 $B_{RS}(i,j)$의 원소값만큼 순환 이동시킨 행렬을 의미
  - 설계된 RS 기반 QC-LDPC 코드는 girth가 최소 6 이상임[1].
- Girth가 8 이상인 RS기반 QC-LDPC 설계 방법[1]
  - $B_{RS}(d,n)$의 t개의 열을 선택하여 행렬 $B_{RS}(d,t)$을 만듬
  - $\Lambda_t=\{l_1,l_2,\cdots,l_t\}$: 선택한 t 개의 열 index set
  - Λ_t의 임의의 3개 원소 $(l_{i_1},l_{i_2},l_{i_3})$이 다음 식을 만족
  - **Girth가 8인 RS 기반 QC-LDPC 패리티 검사 행렬에 프로토그래프를 이용하여 새로운 QC-LDPC 코드의 패리티 검사 행렬을 설계**

2. 실험 결과 및 결론

- 프로토그래프 이용하여 RS 기반 QC-LDPC 코드를 설계하고 성능을 살펴보기 위하여 Bit Error Rate(BER)을 측정
- 성능 비교를 위해 본래 [1]에서 제안된 RS기반 QC-LDPC 코드의 BER을 비교
- $GF(2^8)$에서 RS 패리티 검사 행렬 $B_{RS}(4,85)$를 이용함
- 8개의 원소를 갖는 집합

$$\Lambda_8=\{2,5,7,13,20,32,54,60\}$$

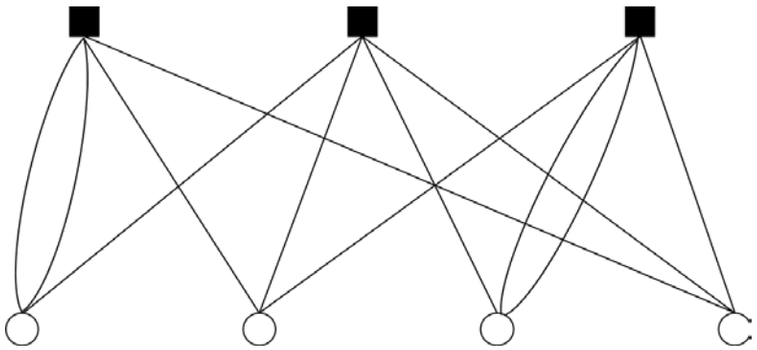
  을 이용하여 서브행렬 $B_{RS}(4,8)$를 생성
- 생성한 패리티 검사 행렬 $H_{RS}(4,8)$은 길이가 2040이고 부호율인 ½인 RS기반 QC-LDPC 코드의 패리티 검사 행렬이 됨 $(r=255)$
- 프로토그래프의 무게 행렬 생성

$$wt\left(H_{RS,1}(4,8)\right)=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Weight matrix of Proto-RS-QC-LDPC Construction

$$l_{i_3} \neq 2l_{i_2} - l_{i_1},\ l_{i_3} \neq 3l_{i_2} - 2l_{i_1},\ l_{i_3} \neq \frac{3l_{i_3} - l_{i_1}}{2},$$
$$n \nmid l_{i_2} + l_{i_3} - 2l_{i_1},\ n \nmid l_{i_2} + 2l_{i_3} - 3l_{i_1},\ n \nmid 2l_{i_2} + l_{i_3} - 3l_{i_1},$$
$$n \nmid 2l_{i_3} - l_{i_1} - l_{i_2},\ n \nmid 3l_{i_3} - 2l_{i_1} - l_{i_2},\ n \nmid 3l_{i_3} - l_{i_1} - 2l_{i_2},$$

- **프로토그래프 기반 QC-LDPC Codes**
  - 작은 Tanner graph를 여러 번 복사 후 각 그래프의 선들을 교환하는 방식으로 설계
  - QC-LDPC 코드의 최소 해밍 거리의 상한을 구하는 방법 및 최소 해밍 거리의 상한이 증가하도록 설계 방법 제시[2]



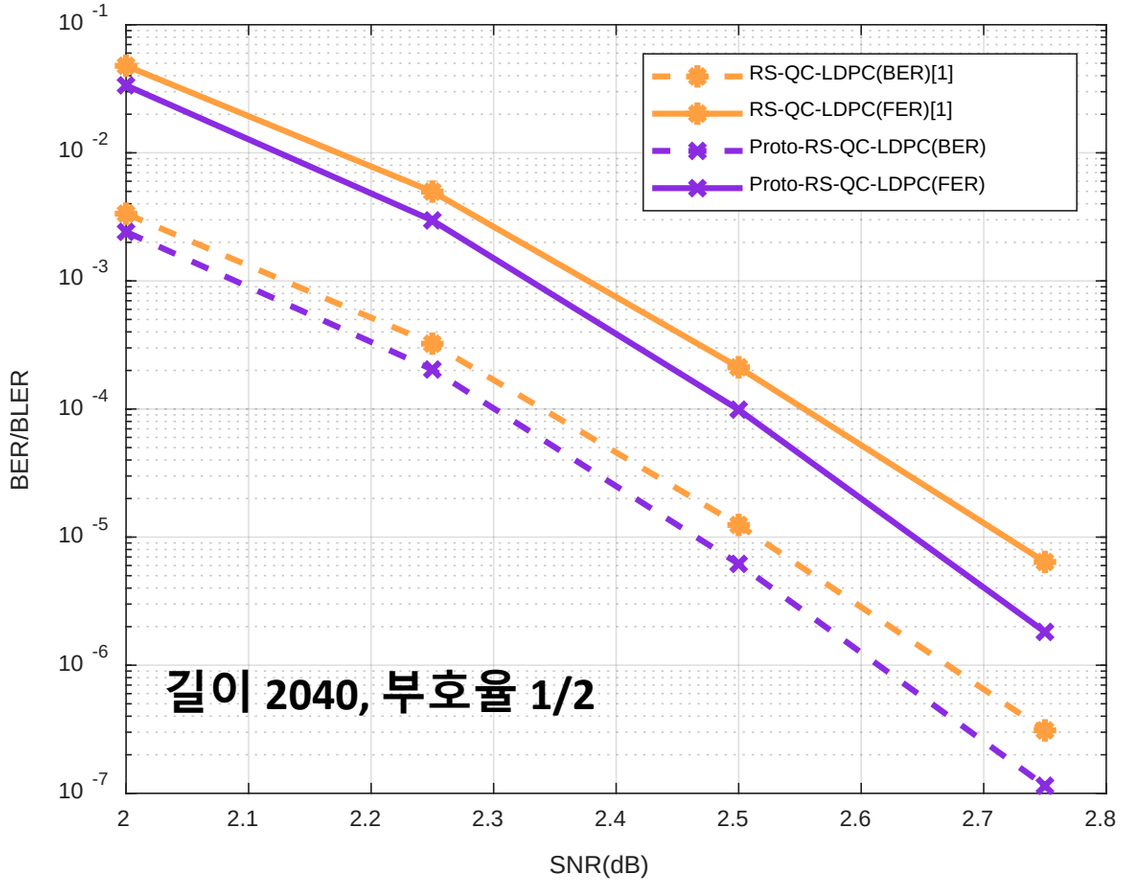
Example of Protograph of QC-LDPC codes

$$H = \begin{bmatrix} I_0 + I_1 & I_1 & 0 & I_2 \\ I_2 & I_0 & I_1 & I_2 \\ 0 & I_1 & I_0 + I_1 & I_1 \end{bmatrix}$$

Parity matrix of Protograph of QC-LDPC codes

$$wt(H) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Weight matrix



- **최소 해밍 거리 상한이 증가하는 프로토 그래프를 이용하여 기존의 RS 기반 QC-LDPC 코드보다 BER 측면에서 0.05dB 성능 이득**
- 최소 해밍 거리 상한을 직접적으로 계산하여 설계한 Protograph based RS-QC-LDPC 코드 분석을 추가로 연구할 예정

- **참고 문헌**

[1] X. Xiao, W.E.Ryan, B.Vasic, S.Lin and K.Abdel-Ghaffar, " Reed-Solomon-Based Quasi-Cyclic LDPC Codes: Designs, Cycle Structure and Erasure Correction," Information Theory and its Application(ITA2018), Catamaran Resort, San Diego, Feb. 21-26, 2018.

[2] R.Smarandache and P.O.Vontobel, "Quasi-Cyclic LDPC Codes: Influence of Proto- and Tanner-Graph Structure on Minimum Hamming Distance Upper Bounds," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 58, no.2, Feb. 2012.