높은 복구 효율성에 대한 맥도날드 부호의 가용도

경치, 최효정, 송홍엽

연세대학교

2020년도 한국통신학회 동계종합학술발표회

본 논문은 펑쳐드 심플렉스 부호인 맥도날드 부호(MacDonald codes)의 단일 심볼 복구를 위한 가용도 t를 계산한다.

▪ 서론

- 부호의 각 단일 심볼이 최대 r개의 다른 심볼들로 구성된 t개의 분리된 복구 집합들로부터 각각 복구가 가능하면 부호 C는 (r,t)-가용도(availability)를 갖는다고 한다.
- 이진 $[n=2^k-1, k, d=2^{k-1}]$ 심플렉스 부호는 가용도 $(r,t)=(2,2^{k-1}-1)$이다[2].
- 펑쳐드 심플렉스 부호인 맥도날드 부호는 부분접속수(locality)가 $l<k-1$일 때 $r=2$, $l=k-1$일 때 $r=3$ 임을 [4]에서 확인했다.

▪ 맥도날드 부호와 가용도

- S_k를 $k\times(2^k-1)$ 행렬이라 하자. S_k는 다음의 재귀에 의해 얻을 수 있다. 먼저, 초기행렬은 $S_1=(1)$, 그리고

$$S_k=\begin{pmatrix} S_{k-1} & 0_{k-1}^T & S_{k-1} \\ 0_{2^{k-1}-1} & 1 & 1_{2^{k-1}-1} \end{pmatrix},\ \text{for } k=2,3,\cdots.$$

- 정의 1 [3] : $k\geq 3$이고, $1\leq l\leq k-1$라 하자. S_k로부터 처음 2^l-1개의 열을 삭제한 결과행렬을 $G_k(l)$로 표기한다. $G_k(l)$에 의해 생성된 부호 $M_k(l)$는 $[2^k-2^l, k, 2^{k-1}-2^{l-1}]$ 맥도날드 부호라 부른다.
- 정의 2 [3]: 부호 C를 부분접속수 r을 갖는 이진 $[n,k,d]$부호이고, $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in C$라고 하자. 만약 각 $i\in[n]$에 대해 사이즈가 최대 r인 분리된 복구집합 $R_1(i),R_2(i),\ldots,R_t(i)\subset[n]\setminus\{i\}$가 적어도 t개 존재하고, 그러한 c_i는 임의의 $\alpha\in[t]$에 대해 $R_\alpha(i)$로서 인덱스된 부호 심볼들의 함수이면 부호 C는 가용도 t를 갖는다고 한다.

- 정리 1. 맥도날드 부호 $M_k(l)$는 다음의 가용도를 갖는 부분접속복구 부호 이다:

$$\begin{cases} (r,t)=\left(2,2^{k-1}-2^l\right), & for\ \ 1\leq l<k-1 \\ (r,t)=\left(3,\dfrac{2^{2\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil}-1}{3}\right), & for\ \ l=k-1 \end{cases}$$

- 보조정리 1. $k\geq 3$이고 $1\leq l<k-1$에 대한 맥도날드 부호 $M_k(l)$는 가용도 $(r,t)=(2,2^{k-1}-2^l)$를 갖는다.
- 보조정리 2. $k\geq 3$이고 $l=k-1$에 대한 맥도날드 부호 $M_k(k-1)$의 모든 심볼들은 같은 수의 분리된 복구집합을 갖는다.
- 보조정리 3. k는 $k\geq 3$인 홀수 정수이고 $l=k-1$에 대한 맥도날드 부호 $M_k(l)$은 가용도 $(r,t)=(3,\frac{2^{k-1}-1}{3})$를 갖는다.

▪ 결론

- 펑쳐드 심플렉스 부호인 맥도날드 부호의 가용도를 확인했다.
- 맥도날드 부호는 좋은 부분접속수와 가용도를 갖는다.
- 향후 맥도날드 부호를 기반으로 이론적 한계식으로서 최적인 부분접속복구 부호를 설계하겠다.

▪ REFERENCES

[1] P. Gopalan, C. Huang, H. Simitci, and S. Yekhanin, "On the locality of codeword symbols," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 58, no. 11, pp. 6925–6934, Nov. 2012.

[2] P. Huang, E. Yaakobi, H. Uchikawa, and P.H. Siegel, "Binary linear locally repairable codes," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 62, no. 11, pp.

[3] J.-H. Kim, M. K. Song, and H.-Y. Song, "Block-Punctured Binary Simplex Codes for Local and Parallel Repair in Distributed Storage Systems," IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, vol.E101, no.12, pp.2374-2381, Dec. 2018.

[4] Q. Fu, R. Li, L. Guo, and L. Lv, "Locality of optimal binary codes," Finite Fields and Their Applications, vol. 48