행렬식의 복잡도 및 성능에 대한 고찰

조현우,김원준,이민형,경치,최효정, 송홍엽

연세대학교

2020년도 한국통신학회 동계종합학술발표회

본 논문은 다양한 정보통신 분야에 밀접하게 사용되는 행렬식을 계산하는 서로 다른 세 가지 방식의 계산 복잡도를 분석하기 위한 전산 실험 수행결과를 간략히 소개한다.

행렬식의 적용 분야

- 다중 안테나 시스템에서 사용되는 프리코딩을 위한 코드북 설계 및 코드 간의 최소 거리를 분석을 위해 사용
- 다중 안테나 시스템에서 원하는 신호 추정을 위한 공분산 행렬 계산 시 사용
- 통계학 및 기계학습 등에서 고차원의 데이터를 저차원의 데이터로 환원시키는 주성분 분석 시 사용

본론

A. 라이프니츠(Leibniz) 공식

$$\det(A) = \sum_{f \in S_n} sign(f) a_{f(1),1} a_{f(2),2} \dots a_{f(n),n}$$

- S_n은 1부터 n까지 정수로 이루어진 집합의 모든 순열들의 집합
- 순열 f는 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots & n \\ f(1) & f(2) \cdots & f(n) \end{pmatrix}$과 같이 표현
- f가 짝수 또는 홀수에 따라 $sign(f)$를 $+1$ 또는 -1로 정의
- $O(n!)$ 의 복잡도를 가짐

B. 여인자 전개 (Cofactor expansion)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$$

- M_{ij}는 i행과 j열의 원소들을 제외한 나머지 원소들로 구성되는 소행렬식(Minor)
- $O(n!)$ 의 복잡도를 가짐

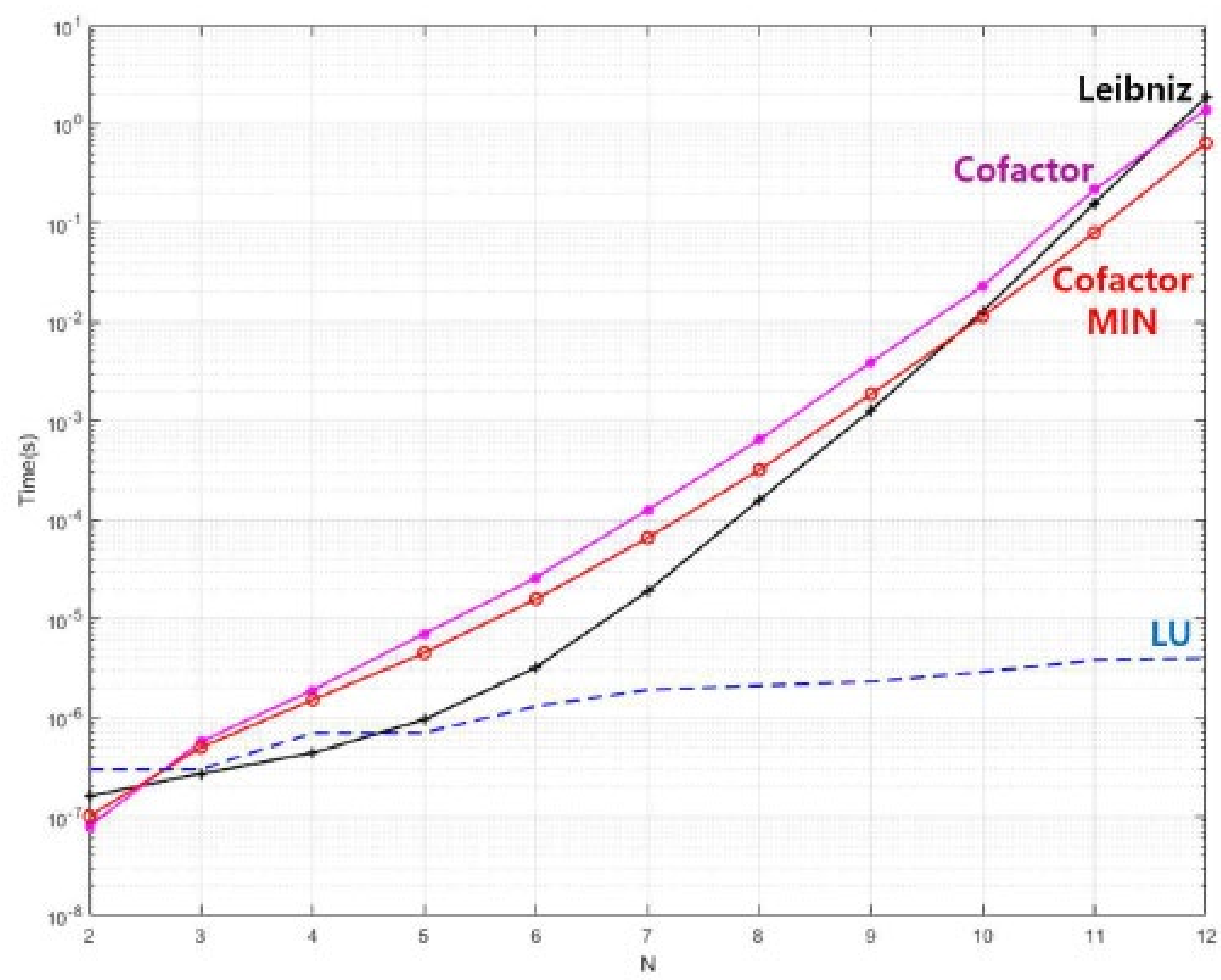
C. LU 분해

- 행렬 A는 행 또는 열의 교환으로 하부 삼각행렬 L과 상부 삼각행렬 U의 곱인 $PA = LU$ 로 나타낼 수 있음
- $\boldsymbol{A}$ 의 행렬식은 다음과 같이 표현될 수 있음

$$\det(A) = sign(P) \prod_{i=1}^{n} d_i$$

* d_i=행렬 U의 대각 성분

- LU 분해는 $O(n^3)$의 시간 복잡도를 가짐



결론

- 행렬 크기가 커짐에 따라 라이프니츠, 여인자 전개, 0의 개수가 적은 행(또는 열)을 찾아 여인자 전개한 방식, 그리고 LU분해 순의 계산 시간을 보여줌
- 정사각행렬 크기가 3 이상일 때, 0의 개수가 적은 행(또는 열)을 찾아 여인자 전개한 방식이 기존 방식보다 빠름
- LU 분해를 이용한 공식이 월등히 우수함을 확인함

CHANNEL CODING
채널코딩연구실