일반화된 프랭크 수열의 비주기적 자기상관에 대한 연구

송민규, 송홍엽

연세대학교

2017년도 한국통신학회 추계종합학술발표회

1. 사전 지식

- $\omega_N = e^{-j2\pi/N}$
- N진 다중위상수열 : 집합 $\{0, 1, \dots, N-1\}$에서의 수열.
- 비주기적 자기상관 (aperiodic auto-correlation) : 길이 N^2의 N진 다중위상수열 $x = \{x(n)\}_{n=0}^{N^2-1}$에 대해, 지연 τ에서 수열 x의 비주기적 자기상관 $C_x(\tau)$는

$$C_x(\tau) = \begin{cases} \sum_{n=\tau}^{N^2-1} \omega_N^{x(n)-x(n+\tau)}, & \text{if } \tau \geq 0 \\ \sum_{n=0}^{N^2-\tau-1} \omega_N^{x(n)-x(n+\tau)}, & \text{if } \tau < 0 \end{cases}$$

  와 같이 계산한다.
  - ✓ 위의 식으로부터, $C_x(\tau) = \left(C_x(-\tau)\right)^*$ 라는 사실을 쉽게 알 수 있다.
  - ✓ 따라서, 일반적으로 $\tau \geq 0$ 일 때만을 고려한다.
- 홀 자기 상관 (odd auto-correlation) : 위와 동일한 표기법에서, 다중위상 수열 x의 지연 τ에서의 홀 자기 상관 $O_x(\tau)$은

$$O_x(\tau) = C_s(\tau) - C_s(N^2 - \tau)$$

  와 같이 계산한다.

3. 일반화된 프랭크 수열의 공통된 비주기적 자기상관 특성

- **정리 1.** 모든 길이 N^2인 N진 일반화된 프랭크 수열의 지연 τ에서의 비주기적 자기상관은, τ가 0이 아닌 N의 배수일 때, 항상 0이다.

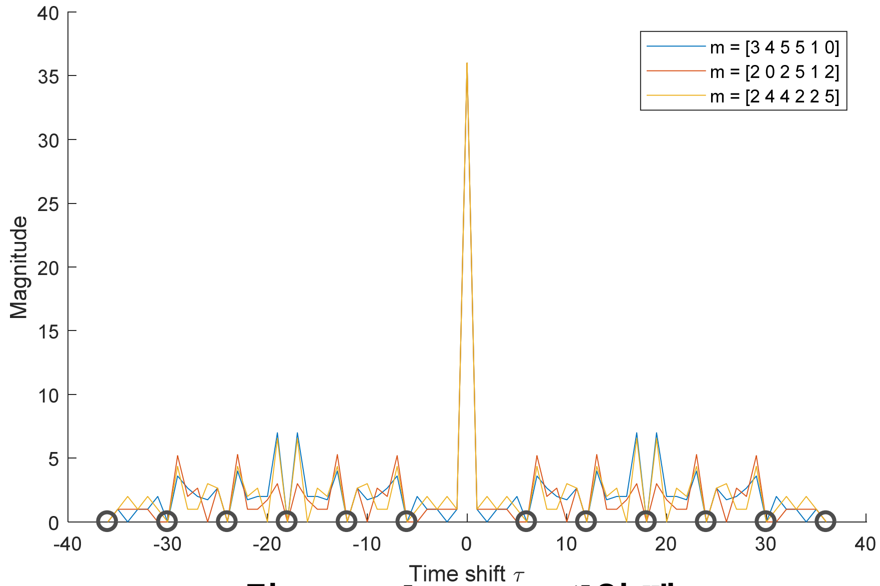

그림 1. $g = [0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5]$일 때, 길이 36인 6진 일반화된 프랭크 수열의 비주기적 자기상관

- **따름정리 1**, 길이 N^2인 N진 일반화된 프랭크 수열의 지연 τ에서의 주기적 홀 자기상관은, $\tau \not\equiv 0 \pmod{N^2}$이고 $\tau \equiv 0 \pmod{N}$인 경우 항상 0이다.

2. 일반화된 프랭크 수열 (generalized Frank sequence)

- 1985년, Kumar, Scholtz, 그리고 Welch에 의해 제안된 일반화된 벤트 함수(generalized bent function)들로 부터 생성되는 수열을 의미한다.

- 임의의 자연수 N에 대해서, 길이 N^2인 N진 일반화된 프랭크 수열 $f = \{f(n)\}_{n=0}^{N^2-1}$는 N진 정수환에서 N진 정수환으로의 두 함수 $g(x)$와 $m(x)$로 정의된다. 여기서, $g(x)$는 치환함수이고, $m(x)$는 임의의 함수이다.

- 길이 N^2인 N진 일반화된 프랭크 수열 f의 k번째 원소는, k를 N으로 나눈 몫과 나머지를 각각 q와 r이라 할 때,
$$f(k) = f(qN + r) = qg(r) + m(r)$$
이다.

- 편의상, 함수 $g(x)$와 $m(x)$를 각각 길이 N인 벡터로 표현한다. 예를들어, $g(0) = 0,\ g(1) = 1,\ g(2) = 2$는
$$g = [0, 1, 2]$$
와 같이 표현한다.

- 일반화된 프랭크 수열 생성 예:
$N = 3, g = [0, 2, 1], m = [1, 0, 2]$일 때,
$$\begin{aligned} f(0) &= f(0 \times N + 0) = 0 \times g(0) + m(0) = 1 \\ f(1) &= f(0 \times N + 1) = 0 \times g(0) + m(1) = 0 \\ f(2) &= f(0 \times N + 2) = 0 \times g(0) + m(2) = 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$
$$\Longrightarrow \quad f = \{1, 0, 2, 1, 2, 0, 1\ 1\ 1\}$$

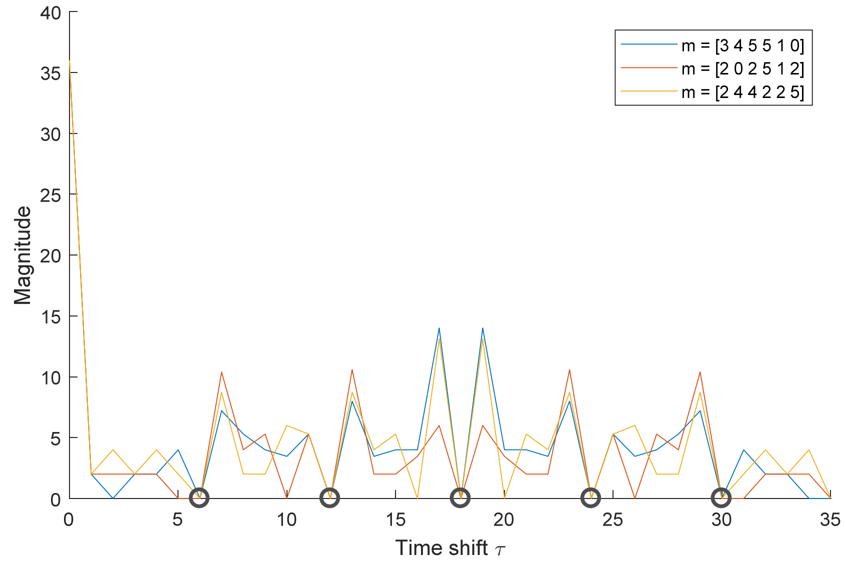

그림 2. $g = [0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5]$일 때, 길이 36인 6진 일반화된 프랭크 수열의 홀 자기상관

3. 결과 고찰

- 일반화된 프랭크 수열의 비주기적 자기상관 특성을 분석할 때에는, 지연 τ가 N의 배수가 아닐 때의 비주기적 자기상관만을 고려하면 된다.

- 이는 일반화된 프랭크 수열의 홀 자기상관 특성을 분석하는 경우에도 성립한다.

- 참고문헌

[1] S. W. Golomb and G. Gong, Signal Design for Good Correlation: For Wireless Communication, Cryptography, and Radar, Cambridge University Press, 2005.

[2] P. V. Kumar, R. A. Scholtz, and L. R. Welch, "Generalized Bent Functions and Their Properties," Journal of combinatorial theory, Series A, vol. 40, pp. 90-107, 1985.