최적 상호상관의 Milewski 수열 집합 생성법

송민규, 송홍엽

연세대학교

2018년도 한국통신학회 하계종합학술발표회

1. 표기법 및 사전 지식

- $\omega_N = e^{-j2\pi/N}$
- 상관 : 주기 N인 두 수열 $\{u(n)\}_{n=0}^{N-1}$, $\{v(n)\}_{n=0}^{N-1}$의 지연 τ에서의 상관을 $C_{u,v}(\tau)$라 표기하며,

$$C_{u,v}(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n)v^*(n+\tau)$$

  와 같이 계산한다. 이때, 자기 자신과의 상관을 자기상관이라 하며, 그 외 경우 상호상관이라 한다.
- 완벽다상수열 : 복소 단위원 상의 원소들로 이루어진, $\tau \not\equiv 0 \ (mod\ N)$에서 자기상관의 크기가 항상 0인 수열.
- Sarwate의 연구에 따르면, 주기 N인 완벽다상수열 집합 내의 최대 상호상관의 크기는 집합의 크기와 관계없이 $\sqrt{N}$보다 항상 크거나 같다 [1].

  - 주기가 N인 두 완벽다상수열의 상호상관 최대 크기가 $\sqrt{N}$인 경우, 이를 **최적 완벽다상수열 쌍**이라 한다.
  - 주기가 N인 완벽다상수열 집합 내의 임의의 서로 다른 두 완벽다상수열이 최적 완벽다상수열 쌍인 경우, 이 집합을 **최적 완벽다상수열 집합**이라 한다.

이다. 여기서, 집합 $A(r_\tau)$와 $B(r_\tau)$는 각각

$$A(r_\tau) = \{0 \le r < r_\tau \mid r_\tau \equiv (b_2 - b_1)r \pmod{m^K}\},$$

$$B(r_\tau) = \{r_\tau \le r < m^K \mid r_\tau \equiv (b_2 - b_1)r \pmod{m^K}\},$$

이다.

- 정리 1. (최적 Milewski 수열 쌍의 충분조건)
  위의 보조정리 1과 동일한 표기에서, 주기 m인 **두 완벽다상수열 α_1과α_2가 최적 완벽다상수열 쌍이고, $b_1 - b_2$가 m과 서로소일 때**, 주기 m^{2K+1}인 두 Milewski 수열 s_1와 s_2는 최적 완벽다상수열 쌍이다. 즉, 모든 지연 τ에 대해서,

$$\left|C_{s_1,s_2}(\tau)\right| \le \sqrt{m^{2K+1}}$$

  이다.

- 따름정리 1. m의 가장 작은 소수 약수를 $p_{\min}$이라 하자.
  1) **정리 1을 이용하여 얻을 수 있는 최적의 Milewski 수열 집합의 크기는 $p_{\min} - 1$ 보다 작거나 같다.**
  2) **따라서, 짝수 주기를 갖는 최적의 Milewski 수열 쌍(또는 집합)은 얻을 수 없다.**

- 정의 1. (Milewski 수열 [2])
  $\alpha = \{\alpha(n)\}_{n=0}^{m-1}$을 주기 m인 완벽다상수열, K를 어떤 자연수라 하자. m과 서로소인 자연수 b에 대해, 주기 m^{2K+1}인 완벽다상수열 $s = \{s(n;\alpha,b)\}_{n=0}^{m^{2K+1}-1}$의 n-번째 항은, n을 m^K로 나눈 몫과 나머지를 각각 q와 r이라 할 때,
  $$s(n;\alpha,b) = \alpha(q)\omega_{m^{K+1}}^{bqr}$$
  로 정의한다.
- 완벽다상수열 α가 Zadoff-Chu 수열인 경우에 한해, 두 Milewski 수열이 최적 상호상관을 갖는 조건이 알려져 있다 [3].

2. 최적 Milewski 수열 집합 생성법

- 보조정리1. 주기가 m인 두 완벽다상수열 α_1, α_2와 m과 서로소인 두 정수 b_1, b_2로 정의 1에 의거하여 생성된 두 Milewski 수열
  $$s_1 = \{s_1(n;\alpha_1,b_1)\}_{n=0}^{m^{2K+1}-1},$$
  $$s_2 = \{s_2(n;\alpha_2,b_2)\}_{n=0}^{m^{2K+1}-1},$$
  의 시간지연 τ에서의 상호상관은, τ를 m^K로 나눈 몫과 나머지를 각각 q_τ 와 r_τ라 할 때,

$$C_{s_1,s_2}(\tau) = m^K C_{\alpha_1,\alpha_2}(q_\tau+1) \sum_{r\in A(r_\tau)} \omega_{m^{K+1}}^{b_1(q_\tau+1)(r+r_\tau)}$$
$$+m^K C_{\alpha_1,\alpha_2}(q_\tau) \sum_{r\in B(r_\tau)} \omega_{m^{K+1}}^{b_1 q_\tau(r+r_\tau)}$$

- 참고로, 정리 1에서 α를 Zadoff-Chu 수열로 제한하면, [3]에 알려진 결과와 같다.
- 정리 1을 기반으로한 최적 Milewski 수열 집합 생성법은 다음과 같다:

입력: 양의정수 K와 주기 m인 최적 상호상관의 완벽다상수열 집합 $\Theta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$.

Step 1. 다음의 집합을 생성한다.
$$I = \{b_i \in Z_{m^{K+1}} \,|\, \gcd(b_i, m) = \gcd(b_i - b_j, m) = 1\ \forall i \neq j\}.$$

Step 2. $\eta = \min\{|\Theta|, |I|\}$를 계산한다.

Step 3. 집합 Θ와 I에서 각각 서로 다른 η개의 원소를 뽑아
$$E = \{(\alpha_{i_1}, b_{i_1}), (\alpha_{i_2}, b_{i_2}), \dots, (\alpha_{i_\eta}, b_{i_\eta})\}$$
와 같이 η개의 수열과 정수 쌍의 집합을 만든다.

Step 4. 다음의 Milewski 수열 집합을 생성한다.
$$F = \{s(\alpha_i, b_i) | (\alpha_i, b_i) \in E\}$$

출력: 최적 상호상관의 주기 m^{2K+1}인 Milewski 수열 집합 F.

- 최적 상호상관의 Milewski 수열 집합 생성법 -

- 참고문헌

[1] D. V. Sarwate, "Bounds on crosscorrelation and autocorrelation of sequences (corresp.)," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 25, no. 6, pp. 720-724, Nov. 1999.

[2] A. Milewski, "Periodic sequences with optimal properties for channel estimation and fast start-up equalization," *IBM J. Res. Develop.*, vol. 27, no. 5, pp. 426-431, Sep. 1983.

[3] P. Z. Fan and M. Darnell, *Sequence design for communications applications*, Exter: John Wiley & Sons Inc., 1996.