Golomb Rulers 기반으로 설계된 가용도를 갖는 새로운 이진 부분접속 복구부호

최효정, 송홍엽

연세대학교

제 33회 통신정보 합동학술대회

본 논문은 Golomb Ruler와 기존에 잘 알려진 QC-LDPC의 패리티 검사 행렬을 생성하는 기법을 기반으로 가용도 (Availability) 2를 갖는 이진 5-순차복구 부분접속 복구부호(5-sequentially recovery Locally Repairable Codes)를 제안한다. 제안하는 5-순차복구 부분접속 복구부호는 일부 경우에 대해 부호율 관점에서 최적이다.

▪ 서론

- 부분접속 복구부호에서 부분접속수 r은 단일 노드 소실을 복구하기 위해 필요한 최소 노드의 수를 의미하고, 가용도 t는 단일 노드 소실을 복구할 수 있는 서로 다른 노드들로 이루어진 서로소인 노드 집합의 수이다.
- u-순차복구 부분접속 복구부호[2]는 일부 순차적 순서가 존재하여 u개의 소실된 심볼들을 순차적으로 복구가 가능하다. [2]에서는 $r \geq 3$에 대해 u가 홀수이고 $\sigma = \left\lfloor \frac{u-1}{2} \right\rfloor$라고 할 때 다음 한계식을 증명했다.

$$\frac{k}{n} \leq \frac{r^{\sigma+1}}{r^{\sigma+1}+2\sum_{i=1}^{\sigma} r^{i}+(u-2\sigma)} \qquad (1)$$

- 지수행렬 $E = [e(i,j)]$ 기반으로 QC-LDPC 부호의 패리티 검사 행렬을 생성하는 기법이 [3]에서 제안되었다. [3]에서는 지수행렬 E의 위치 (i,j)에 대해 $e(i,j)$만큼 순환 이동한 순열행렬을 패리티 검사 행렬 H에 대입함으로써 $H = [H_{e(i,j)}]$를 생성한다.
- $0 \leq g_1 < g_2 < \cdots < g_s$인 정수집합 $\{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$가 모든 $i < j$에 대해 차이 $g_j - g_i$가 모두 다르다면 그 집합을 Golomb ruler라고 한다[4]. Golomb ruler의 길이는 차이 $g_s - g_1$을 의미하며, 최적의 s-mark Golomb ruler는 원소의 수가 s일때 가능한 가장 작은 길이를 갖는 Golomb ruler를 의미한다.

▪ REFERENCES

[1] J.-H. Kim, and H.-Y. Song, "Alphabet-Dependent Bounds for Locally Repairable Codes with Joint Information Availability," IEEE Commun.Lett., vol. 21, no. 8, pp. 1687-1690, Aug. 2017.

[2] S. B. Balaji, G. R. Kini, and P. V. Kumar, "A tight rate bound and a matching construction for locally recoverable codes with sequential recovery from any number of multiple erasures," in Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory (ISIT), pp. 1778–1782, Jun. 2017.

[3] M.P.C. Fossorier, "Quasicyclic low-density parity-check codes from circulant permutation matrices," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 50, no. 8, pp.1788–1793, 2004.

[4] A. Dimitromanolakis, "Analysis of the golomb ruler and the sidon set problems, and determination of large, near-optimal golomb rulers," Master's Thesis, Technical University of Crete, Chania, 2002.

▪ 본론

정리 1. $2 \leq s \leq m$인 두 정수 s와 m을 고려하자. 집합 $\{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$를 s-mark Golomb ruler라고 하자. 여기서 $0 \leq g_1 < g_2 < \cdots < g_s$이다. 그리고 $\mathrm{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_{\binom{s}{2}}\}$를 $i < j$에 대하여 모든 가능한 차이 $g_j - g_i$의 집합이라 하고 g_s보다 큰 양의정수 m은 $i = j$인 경우를 포함하여 모든 i, j에 대해 다음 조건을 만족한다고 하자.

$$d_i + d_j \not\equiv 0 \pmod{m} \qquad (2)$$

정수 $c \geq 0$에 대해 크기가 $2 \times s$인 지수행렬 $E = [e(i,j)]$은 다음과 같다고 하자.

$$E = \begin{pmatrix} c & c & \cdots & c \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_s \end{pmatrix} \qquad (3)$$

만약 $H = [H_{e(i,j)}]$가 모든 (i,j)에 대해 크기 $m \times m$의 항등행렬을 지수행렬 E의 각 원소 $e(i,j)$만큼 순환 이동한 행렬을 대입하여 얻어지는 행렬이라면, 그 H 행렬을 패리티 검사 행렬로 갖는 선형 부호는 5-순차복구 (n, k, r, t)- 부분접속 복구부호이다. 여기서 $n = sm, (s-2)m + 1 \leq k \leq (s-2)m + \left\lfloor \frac{m}{s} \right\rfloor, r = s - 1, t = 2$이다. 그리고 이 부호의 복구시간은 최대 3이다.

정리 2. 집합 $\{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$를 s-mark Golomb ruler라고 하자. 여기서 $0 \leq g_1 < g_2 < \cdots < g_s$이다. 그리고 $\mathrm{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_{\binom{s}{2}}\}$를 $i < j$에 대하여 모든 가능한 차이 $g_j - g_i$의 집합이라 하자. 만약 $m > 2g_s$라면, 정리 1의 조건 (2)를 만족한다. 만약 $m = 2g_s$라면, 조건 (2)를 만족하지 않는다. 만약 $g_s < m < 2g_s$라면, 조건 2에 대해 컴퓨터 체크가 필요하다.

▪ 결론

본 논문에서는 Golomb Ruler와 기존에 잘 알려진 QC-LDPC의 패리티 검사 행렬을 생성하는 기법을 기반으로 가용도 2를 갖는 이진 5-순차복구 부분접속 복구부호를 제안했다. 제안하는 부호는 임의의 5개의 심볼을 최대 3-복구시간 동안 순차적으로 복구가 가능하고 최적의 Golomb ruler를 사용한 경우 한계식 (1)의 관점에서 최적이다.

s	최적의 Golomb Ruler	m의 최소값	n	k	부호율	$u = 5$에 대한 한계식 (1)의 값
4	0,1,4,6	13	52	27	0.519	0.519
5	0,2,7,8,11	21	105	64	0.610	0.610
6	0,1,4,10,12,17	31	186	125	0.672	0.672
7	0,2,3,10,16,21,25	49	343	246	0.717	0.717

표 1. 정리 1에 최적의 Golomb Ruler를 적용하여 생성된 최적의 5-순차복구 부분접속 복구부호