



부분적으로 $B_3(4)$ 수열을 포함하는 $B_2(5)$ 수열을 이용한 QC-LDPC 부호 생성

김대경, 송홍엽

연세대학교



- 서론
 - 연구 요약
 - $B_3(m)$ 수열
 - QC-LDPC 부호
- 본론
 - $B_3(m, k)$ 수열 정의
 - 본 논문의 QC-LDPC 부호 생성법
 - Cycle 수 비교
 - 성능 시뮬레이션
- 결론



서론



- 기존 girth-8을 만족시키기 위해 특정 수열을 이용해 짧은 길이의 QC-LDPC 부호를 생성하는 방식이 연구됨[1,2]
- 본 논문에서
 1. $B_3(4)$ 수열들을 포함하는 $B_2(5)$ 수열 제시
 2. QC-LDPC 부호의 girth 파라미터에 대한 분석을 목적으로, 앞서 언급한 수열 이용 설계
 3. 다양한 구조로 짧은 QC-LDPC 부호를 생성하여 cycle 수 및 성능 비교

[1] I. Kim and H.-Y. Song, "A construction for girth-8 QC-LDPC codes using Golomb rulers," *Electronics Letters*, vol. 58, no. 15, pp. 582-584, 2022.

[2] 김대경, 김원준, 송홍엽, "B3 수열을 이용한 간단한 구조의 Multi-Edge QC-LDPC 부호 생성 및 분석," 2023년 한국통신학회 하계종합학술발표회, 라마다프라자 제주호텔, 2023년 06월 21일-24일.



$B_3(m)$ 수열



- $B_3(m)$ 수열 $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ 은 중복을 허락하여 고른 3개 원소의 합

$$a_i + a_j + a_k$$

들이 $i < j < k$ 에 대해 모두 다르다는 성질로 정의[3]

- $B_3(m)$ 수열의 길이

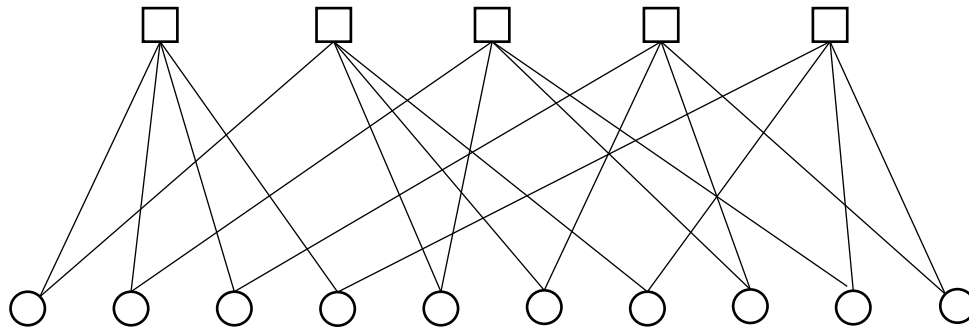
$$L = a_m - a_1$$

- $B_3(5)$ 수열 **{0, 1, 15, 20, 23}** → 모든 경우(${}_5H_3 = 35$ 개)의 합이 모두 다름

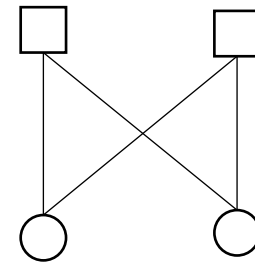
(1) $0 + 0 + 0 = 0$	(11) $0 + 15 + 20 = 35$	(21) $1 + 15 + 20 = 36$	(31) $15 + 23 + 23 = 61$
(2) $0 + 0 + 1 = 1$	(12) $0 + 15 + 23 = 38$	(22) $1 + 15 + 23 = 39$	(32) $20 + 20 + 20 = 60$
(3) $0 + 0 + 15 = 15$	(13) $0 + 20 + 20 = 40$	(23) $1 + 20 + 20 = 41$	(33) $20 + 20 + 23 = 63$
(4) $0 + 0 + 20 = 20$	(14) $0 + 20 + 23 = 43$	(24) $1 + 20 + 23 = 44$	(34) $20 + 23 + 23 = 66$
(5) $0 + 0 + 23 = 23$	(15) $0 + 23 + 23 = 46$	(25) $1 + 23 + 23 = 47$	(35) $23 + 23 + 23 = 69$
(6) $0 + 1 + 1 = 2$	(16) $1 + 1 + 1 = 3$	(26) $15 + 15 + 15 = 45$	
(7) $0 + 1 + 15 = 16$	(17) $1 + 1 + 15 = 17$	(27) $15 + 15 + 20 = 50$	
(8) $0 + 1 + 20 = 21$	(18) $1 + 1 + 20 = 22$	(28) $15 + 15 + 23 = 53$	
(9) $0 + 1 + 23 = 24$	(19) $1 + 1 + 23 = 25$	(29) $15 + 20 + 20 = 55$	
(10) $0 + 15 + 15 = 30$	(20) $1 + 15 + 15 = 31$	(30) $15 + 20 + 23 = 58$	

[3] A. W. Lam and X. Duan, "Optimal Bh(n) sequences," *Electronics Letters*, vol. 25, no. 6, pp. 477–478, 1989.

- QC-LDPC 부호는 *quasi-cyclic* 성질을 만족하는 LDPC 부호로 구조상 하드웨어 구현이 용이해 5G NR 등 다양한 무선통신 표준의 오류정정부호로 사용[3]
- 오류정정부호 중 LDPC 부호는 신뢰전파 알고리즘으로 복호
- LDPC 부호의 Tanner 그래프에 짧은 *cycle*은 복호 성능의 저하를 야기하며 최소 *cycle* 길이(*girth*)를 높이는 LDPC 부호 설계 필요



[Tanner graph]



[4-cycle]



본문

- 본 논문에서 $B_3(m, k)$ 수열을 다음과 같이 정의

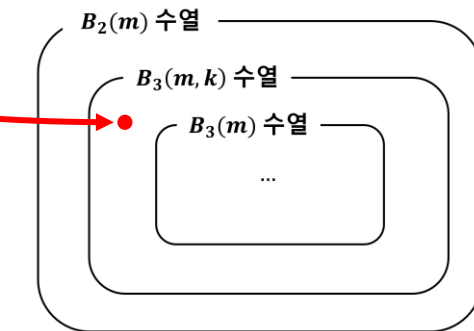
임의의 k 개의 원소들을 오름차순으로 나열하여도 $B_3(k)$ 수열이 되는 $B_2(m)$ 수열

- 예시 : $B_3(5, 4)$ 수열 $\{0, 1, 5, 16, 19\}$

- (1) $0 + 0 = 0$
- (2) $0 + 1 = 1$
- (3) $0 + 5 = 5$
- (4) $0 + 16 = 16$
- (5) $0 + 19 = 19$
- (6) $1 + 1 = 2$
- (7) $1 + 5 = 6$
- (8) $1 + 16 = 17$
- (9) $1 + 19 = 20$
- (10) $5 + 5 = 10$
- (11) $5 + 16 = 21$
- (12) $5 + 19 = 24$
- (13) $16 + 16 = 32$
- (14) $16 + 19 = 35$
- (15) $19 + 19 = 38$

모두 $B_3(4)$ 수열

- $\{1, 5, 16, 19\}$
- $\{0, 5, 16, 19\}$
- $\{0, 1, 16, 19\}$
- $\{0, 1, 5, 19\}$
- $\{0, 1, 5, 16\}$



$$0 + 5 + 16 = 1 + 1 + 19$$

$B_2(5)$ 수열

$B_3(5, 4)$ 수열

$B_3(5)$ 수열 X

- 오름차순 수열 $\{a_1 = 0, a_2, a_3, a_4, a_5 = L\}$ 을 이용하여 아래와 같이 행렬 생성

$I : P \times P$ 크기 항등행렬
 $\Phi : I$ 를 오른쪽으로 한번 순환이동한 행렬
 $\Phi^t : I$ 를 오른쪽으로 t 번 순환이동한 행렬 (CPM)

$$(a) \begin{bmatrix} \Phi^{a_2} & \Phi^{a_3} & \Phi^{a_4} & \Phi^{a_5} \\ \Phi^{2a_2} & \Phi^{2a_3} & \Phi^{2a_4} & \Phi^{2a_5} \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} \Phi^{a_2} & \Phi^{a_3} & \Phi^{a_4} & \Phi^{a_5} \\ \Phi^{2a_2} & \Phi^{2a_3} + \Phi^{3a_3} & \Phi^{2a_4} & \Phi^{2a_5} + \Phi^{3a_5} \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} \Phi^{a_2} & \Phi^{a_3} & \Phi^{a_4} & \Phi^{a_5} \\ \Phi^{2a_2} + \Phi^{3a_2} & \Phi^{2a_3} + \Phi^{3a_3} & \Phi^{2a_4} + \Phi^{3a_4} & \Phi^{2a_5} + \Phi^{3a_5} \end{bmatrix}$$

→ Parity Check 행렬로써 부호길이 $n = 4P$ 의 QC-LDPC 부호 정의

- $B_3(5,4)$ 수열 및 $B_3(5)$ 수열을 이용하여 생성된 LDPC 부호의 cycle 수 ($P = 58$)

$P = 58$ ($n = 232$)	$B_3(5,4)$ 수열 {0,1,5,16,19}		
	(a)	(b)	(c)
4-cycle	0	0	0
6-cycle	0	0	0
8-cycle	0	232	2320
10-cycle	0	1508	15486
12-cycle	232	7737	140882

girth-12

girth-8

girth-8

cycle 수 증가

$P = 58$ ($n = 232$)	$B_3(5)$ 수열 {0,1,5,20,23}		
	(a)	(b)	(c)
4-cycle	0	0	0
6-cycle	0	0	58
8-cycle	0	319	2349
10-cycle	0	1392	13978
12-cycle	290	6670	143608

girth-12

girth-8

girth-6

cycle 수 증가

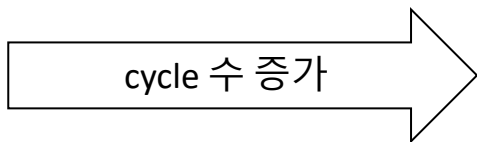
- $B_3(5,4)$ 수열 및 $B_3(5)$ 수열을 이용하여 생성된 LDPC 부호의 cycle 수 ($P = 128$)

$P = 128$ ($n = 512$)	$B_3(5)$ 수열 {0,1,5,20,23}		
	(a)	(b)	(c)
4-cycle	0	0	0
6-cycle	0	0	0
8-cycle	0	384	3328
10-cycle	0	1664	16384
12-cycle	512	8448	170304

girth-12

girth-8

girth-8

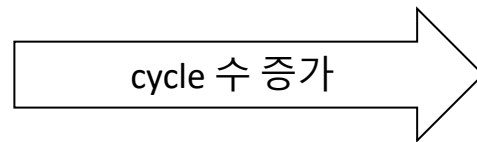


$P = 128$ ($n = 512$)	$B_3(5)$ 수열 {0,1,5,20,23}		
	(a)	(b)	(c)
4-cycle	0	0	0
6-cycle	0	0	0
8-cycle	0	384	3328
10-cycle	0	1664	16384
12-cycle	512	8448	170304

girth-12

girth-8

girth-8





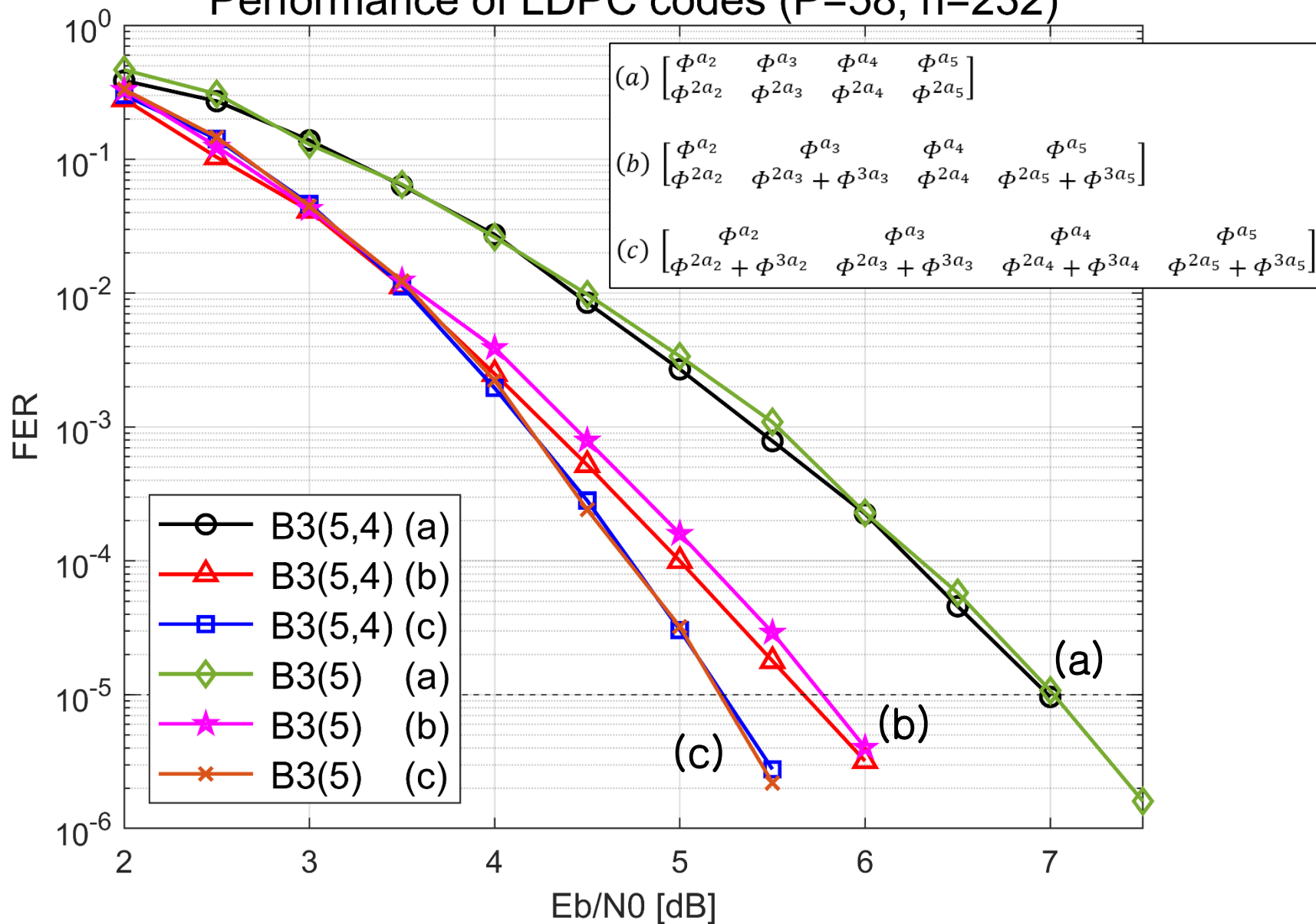
복호 성능 시뮬레이션



- BPSK 변조 가정, AWGN 채널에서의 복호 성능 확인
- Sum-Product 복호 (최대 iteration 10회)
- E_b/N_0 에 따른 Frame Error Rate(FER)을 시뮬레이션을 통해 확인

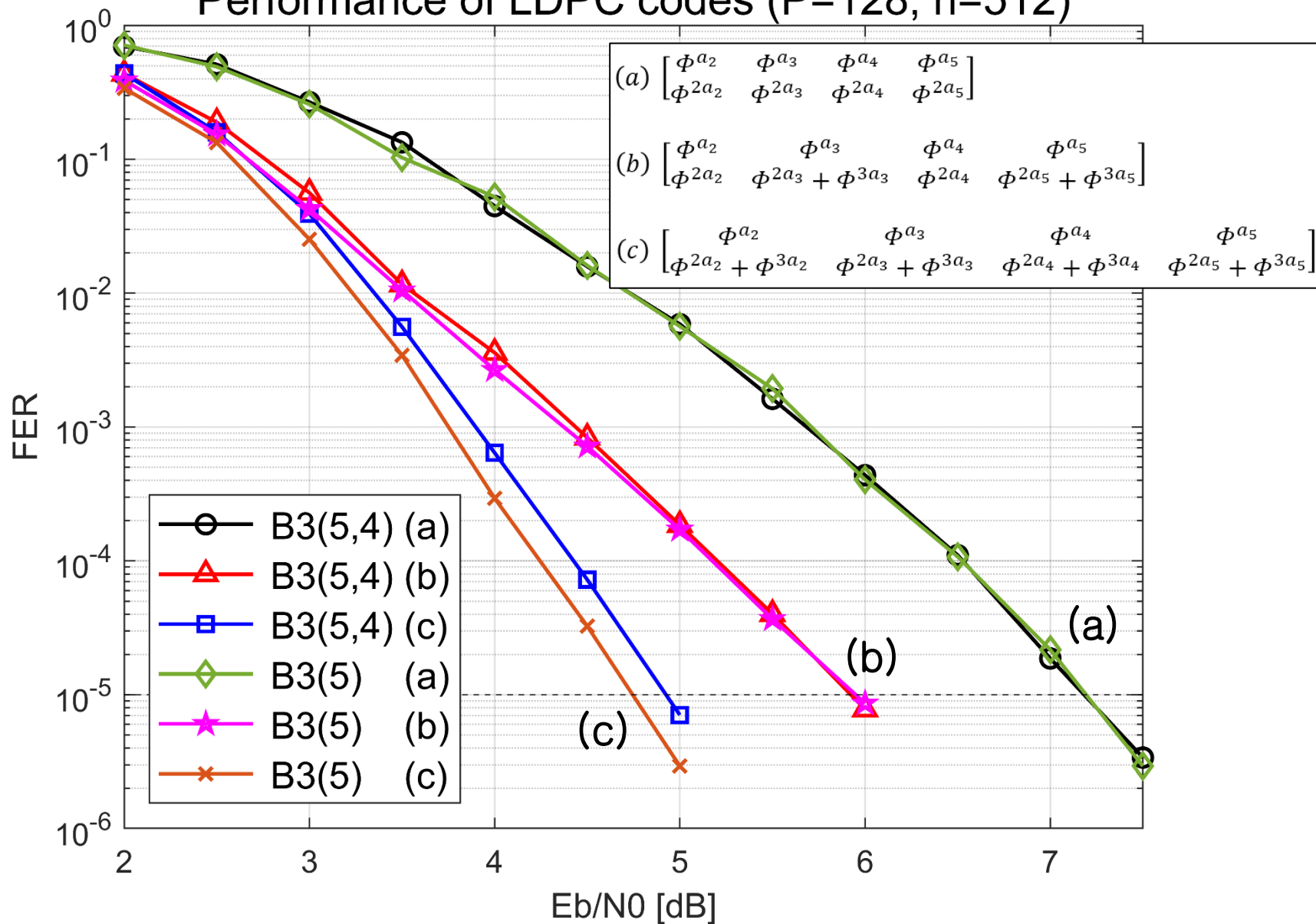
복호 성능 시뮬레이션

Performance of LDPC codes (P=58, n=232)



복호 성능 시뮬레이션

Performance of LDPC codes (P=128, n=512)





결론

- 본 논문은 $B_3(4)$ 수열을 포함하는 $B_2(5)$ 수열을 제시함
- 본 논문은 제시한 수열 이용 다양한 QC-LDPC 부호 생성 및 분석
 - 1의 수가 많은 parity check 행렬 구조일 수록 전반적인 cycle 수 증가
 - $B_3(4)$ 수열을 이용 시, $B_3(5)$ 수열보다 더 짧은 부호길이에서 girth-8 만족 ((c), $n = 232$)
 - 전반적으로 1의 수가 많은 구조의 복호 성능 우수
 - 상대적으로 긴 부호길이에서는 $B_3(5)$ 수열을 이용하는 경우 cycle 수가 적으며 성능도 우수
- 결론
 - QC-LDPC 부호의 성능은 girth 파라미터 외에도 parity check 행렬 구조에 큰 영향 받음
 - 추후 연구로, 복잡한 구조의 부호 설계 및 girth 포함 다양한 파라미터의 분석 가능